**Problème 138 – Le jeu de Lucky Luke – Corrigé**

1) 10 doigts représentent un univers fini à 10 éléments.

Choisir n doigts consiste à trouver toutes les parties à n éléments parmi 10 possibles.

Il y a donc combinaisons possibles.

2) Avec n allant de 0 à 10, le nombre total de combinaisons est égal à .

La leçon nous permet de dire que cette somme est égale à 210, soit 1 024.

Autre explication possible : en créant un arbre de combinaisons, qui indique pour chaque doigt son état (levé, ou pas levé), on a 2 branches possibles pour chaque doigt, ce qui donne bien 210 possibilités.

3) Si n doigts ne sont pas levés, cela veut dire qu’il y en a 10 – n de levés.

Or .

Donc le nombre de combinaisons pour n doigts levés est le même que pour n doigts non levés.

4) a) Pour n < 2 ou n > 7, Lucie n’a aucune possibilité.

Pour n ≥ 2 et n ≤ 7 : si elle lève 2 doigts de la main gauche, elle va en lever n – 2 sur la main droite.

La main gauche est un ensemble fini à 5 éléments dans lequel elle doit choisir 2 éléments : il y en a donc . De même sur la main droite, elle aura donc possibilités.

Donc Lucie aura possibilités.

b) Pour n = 6 : .

5) est le nombre de combinaisons de n doigts levés sur 10 possibles.

Or ces n doigts se répartissent sur 2 mains à 5 doigts : si on appelle k le nombre de doigts levés sur la main gauche, il y en aura n – k sur la main droite. On doit alors séparer les cas où n ≤ 5 et n > 5 :

**Pour n ≤ 5**:

C’est la somme du nombre de combinaisons en choisissant k doigts levés sur la main gauche et n-k levés sur la main droite, avec k allant de 0 au nombre n choisi.

**Pour n > 5 :**

C’est la même chose, sauf qu’on ne peut pas choisir moins de k = n-5 doigts sur la main gauche car sinon on ne pourrait pas compléter avec les doigts de la main droite pour lever n doigts. De même on ne peut pas choisir plus de 5 doigts sur la main gauche, donc on est limité à k = 5.

Ces deux formules se résument en une seule en introduisant les notations min et max proposées

En effet : k débute de 0 tant que n ≤ 5 (dans ce cas n-5 est négatif, donc max (0 ; n-5) = 0) -, et de n-5 quand n ≥ 5 (quand n-5 est positif, donc max (0, n-5) = n-5)). Max (0 ; n-5) résume donc bien quand k débute dans la somme, en fonction de n.

De même : k se termine à n quand n ≤ 5 (et dans ce cas, min (5 ; n) = n). k se termine à 5 quand n ≥ 5 (et dans ce cas, min (5 ; n) = 5). Min (5 ; n) résume donc bien quand k se termine dans la somme, en fonction de n.